Lineare Algebra II
Lösungsvorschläge zum Tutoriumsblatt 12

Moritz Fleischmann

Zur Vorlesung von Prof. Dr. Fabien Morel, Dr. Andrei Lavrenov, Katharina Novikov und Oliver Hendrichs im Sommersemester 25

Disclaimer: Das sind keine offiziellen Lösungen, sondern nur eine getexte Version der Lösungen zu ausgewählten Aufgaben (Dank geht hierbei an Andrei Lavrenov für seine Lösungsskizzen), die ich in meinem Tutorium bespreche. Fehler, Fragen oder Anmerkungen gerne an m.fleischmann@mnet-online.de. Verteilung der Lösungen ist erlaubt und erwünscht.

Wie üblich, wen das Vorgeplänkel nicht interessiert, der kann die Lösungen in den grau hinterlegten Boxen finden. Es gilt grundsätzlich, dass $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$.

Aufgabe 1

Wir betrachten die Rotation um den Mittelpunkt in $\mathbb{R}^2$ um θ Grad:

$$\rho_\theta := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in SO(2)$$

Finde eine Zerlegung von ρ_θ in das Produkt zweier Spiegelungen.

Lösung:

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass sich jedes Element aus $SO(n)$ als Produkt von maximal n Spiegelungen darstellen lässt, also wissen wir, dass diese Zerlegung existiert. Wir werden dem Beweis in der Vorlesung folgen:

Wir wollen zuerst eine Spiegelung $S_1 \in O(2)\backslash SO(2)$ finden, die $\rho_\theta(e_1)$ wieder auf e_1 zurück abbildet. Danach wollen wir eine Spiegelung S_2 finden, die die erste Komponente eines Vektors fixiert, aber auf die zweite Komponente so wirkt, dass $S_1\rho_\theta(e_2)$ auf e_2 zurück abgebildet wird.

Finden wir S_1 und S_2 die diese Eigenschaften erfüllen, so gilt:

$$\begin{aligned} S_2S_1\rho_\theta e_1 &= S_2 e_1 = e_1 \\ S_2S_1\rho_\theta e_2 &= S_2(S_1\rho_\theta e_2) = e_2 \end{aligned}$$

da unsere Abbildung auf alle Basisvektoren als Identität wirkt, muss die Abbildung bereits die Identität selbst sein. Es gilt also $S_2S_1\rho_\theta = \mathbb{1}_2$ und damit gilt $\rho_\theta = (S_2S_1)^{-1} = S_1^{-1}S_2^{-1} = S_1S_2$, also die gewünschte Zerlegung.

Wir bestimmen zuerst S_1. Es gilt

$$\rho_\theta e_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Man kann sich ein Bild zeichnen um sich davon zu überzeugen, dass die Spiegelung an der Achse, die zu e_1 einen Winkel von $\theta/2$ hat, diesen Vektor wieder auf e_1 zurück abbilden muss und die Matrix dieser Abbildung finden. Alternativ können wir uns überlegen, dass eine Spiegelung stets von der Form

$$S_1 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

annimmt. Setzen wir hier für $\varphi = \theta$ ein, erhalten wir

$$S_1\rho_\theta e_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 \\ \sin(\theta)\cos(\theta) - \cos(\theta)\sin(\theta) \end{pmatrix} = e_1$$

S_1 passt also so. Wir bestimmen nun

$$S_1\rho_\theta e_2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -e_2$$

Wir brauchen also eine Abbildung, die $e_1 \mapsto e_1$ und $-e_2 \mapsto e_2$ erfüllt. Das gilt aber klarerweise für

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Damit ist auch die zweite Spiegelung gefunden. Es gilt:

$$S_1S_2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \rho_\theta$$

Aufgabe 2
Wir betrachten

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Diagonalisiere A und finde eine Diagonalbasis für A.
2. Zeige, dass $\langle \cdot , \cdot \rangle_A$ positiv definit ist und finde eine Basis in der die Grammatrix der Form $\langle \cdot , \cdot \rangle_A$ diagonal ist.

Lösung:

1. Wir folgen dem üblichen Algorithmus zur Diagonalisierung einer Matrix. Wir bestimmen zuerst die Eigenwerte. Dafür berechnen wir das charakteristische Polynom:

$$\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)^3 - 2(2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 2) = -(2-\lambda)((2-\sqrt{2}) - \lambda)((2+\sqrt{2}) - \lambda)$$

also sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2 - \sqrt{2}, \lambda_3 = 2 + \sqrt{2}$. Wir bestimmen als nächstes die Eigenvektoren. Es gilt:

$$A - \lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \ker(A - \lambda_1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

sowie

$$A - \lambda_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \ker(A - \lambda_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und

$$A - \lambda_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \ker(A - \lambda_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

also ist die Diagonalform von A gegeben durch

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

und die Transformationsmatrix, sodass $S^{-1}AS = D$ gilt lautet

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Eine positiv definite, symmetrische Bilinearform mit Darstellungsmatrix B induziert mittels des Standardskalaprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_B : V \times V &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^T B y = \langle x, By \rangle \end{aligned}$$

das wiederum eine Norm und Winkel analog zum Standardskalarprodukt induziert. Wir wollen hier eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ finden, sodass die Grammatrix mit Einträgen

$$(G_B)_{j,k \in [n]} = \langle v_j, v_k \rangle_B$$

diagonal ist, es soll also für $j \neq k$ gelten, dass $\langle v_j, v_k \rangle_B = 0$. Das heißt wir suchen eine Orthogonalbasis bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ und können das Gram-Schmidt-Verfahren bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ anwenden:

Zuerst wollen wir zeigen, dass A positiv definit ist, dass also $\forall x \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} : \langle x, Ax \rangle > 0$ gilt. Wir wählen dafür einen allgemeinen Vektor $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ und berechnen:

$$\begin{aligned} v^T A v &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + 2y - z \\ -y + 2z \end{pmatrix} \\ &= 2x^2 - xy - xy + 2y^2 - zy - zy + 2z^2 \\ &= x^2 + z^2 + (x - y)^2 + (y - z)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

und $v^T A v = 0$ genau dann, wenn $x = y = z = 0$ gilt. Wir haben also gezeigt, dass A positiv definit ist. Außerdem haben wir eine Formel für die von A induzierte Norm gefunden, da $\|v\|_A^2 = v^T A v$ gilt. Wir wählen als Ausgangsbasis des $\mathbb{R}^3$ die Vektoren e_1, e_2, e_3. In jedem Schritt wollen wir die Vektoren erst orthogonalisieren und diesen orthogonalisierten Vektor dann normieren (Erleichtert die Rechnungen.)

(a) Vektor 1:
Wir müssen hier nichts orthogonalisieren - also gilt $v_1 = e_1$ - und bestimmen nur die Norm:

$$\|e_1\|_A^2 = \langle e_1, e_1 \rangle_A = 2$$

und damit ist unser bezüglich $\|\cdot\|_A$ normierter Vektor:

$$\hat{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1$$

(b) Vektor 2:
Orthogonalisieren:

$$v_2 = e_2 - \langle \hat{v}_1, e_2 \rangle_A \hat{v}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und normieren (wir setzen einfach in die vorher bestimmte Formel ein und erinnern uns daran, dass wir beim Normieren alle positiven Vorfaktoren fallen lassen können.)

$$\|v_2\|_A^2 = 1^2 + (2-1)^2 + (2-0)^2 = 6$$

und damit gilt

$$\hat{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) Vektor 3:
Orthogonalisieren:

$$v_3 = e_3 - \langle \hat{v}_1, e_3 \rangle_A \hat{v}_1 - \langle \hat{v}_2, e_3 \rangle_A \hat{v}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und normieren (Dieser Schritt ist nicht wirklich notwendig, da wir ja nur eine Orthogonalbasis und keine Orthonormalbasis angeben sollen):

$$\|v_3\|_A^2 = 1^2 + 3^2 + (2-1)^2 + (3-2)^2 = 12 \Rightarrow \hat{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und G_A bezüglich dieser Basis ist diagonal, es gilt also

$$G_A(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

bzw. (Wie gesagt, das hier ist nur Bonus)

$$G_A(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Um Missverständnissen vorzubeugen:

Man darf hier keine Begrifflichkeiten vertauschen. Sei $B = (v_1, v_2, v_3)$ die von uns bestimmte Basis und

$$T := \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dann ist die Grammatrix $G_A(v_1, v_2, v_3)$ gegeben durch

$$G_A(v_1, v_2, v_3) = T^T AT$$

Da T allerdings keine orthogonale Matrix ist, ist $T^T \neq T^{-1}$, also ist das keine Darstellung von A in der Basis B. Tatsächlich gilt

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{-3}{4} & 0 \\ -1 & \frac{13}{6} & \frac{-8}{9} \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Man muss also unterscheiden zwischen der Grammatrix von A bezüglich B und der Darstellungsmatrix von A in B.

Aufgabe 3

Seien $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ und sei $\sigma \in S_n$. Zeige, dass die Determinante der Grammatrix von $v_1, \dots, v_n$ σ-invariant ist, d.h.

$$\det G(v_1, \dots, v_n) = \det G(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$$

Lösung:

Wir wissen aus dem letzten Semester bereits, dass wir alle Permutationen als Transpositionen benachbarter Indizes schreiben können. Das heißt es gibt Indizes $j_1, \dots, j_k$ mit

$$\sigma = \tau_{j_1, j_1+1} \circ \tau_{j_2, j_2+1} \circ \dots \circ \tau_{j_k, j_k+1}$$

Es reicht also die σ-Invarianz zu zeigen, wenn σ eine solche Transposition ist. Es sei $j \in [n]$ und wir zeigen, dass die Gramdeterminante $\tau_{j,j+1}$-invariant ist.
Es gilt, dass $\hat{G} := G(v_{\tau_{j,j+1}(1)}, \dots, v_{\tau_{j,j+1}(n)})$ der originalen Grammatrix entspricht, nur dass wir an allen Stellen v_j durch v_{j+1} tauschen und umgekehrt. Ausgeschrieben gilt also:

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_{j+1} \rangle & \langle v_1, v_j \rangle & \dots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_{j+1}, v_1 \rangle & \dots & \langle v_{j+1}, v_{j+1} \rangle & \langle v_{j+1}, v_j \rangle & \dots & \langle v_{j+1}, v_n \rangle \\ \langle v_j, v_1 \rangle & \dots & \langle v_j, v_{j+1} \rangle & \langle v_j, v_j \rangle & \dots & \langle v_j, v_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \dots & \langle v_n, v_{j+1} \rangle & \langle v_n, v_j \rangle & \dots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix}$$

Es sei $T = T_{j,j+1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die elementare Transformationsmatrix die, von links an eine Matrix A multipliziert die j-te und $j+1$-te Zeile vertauscht, und von rechts an eine Matrix A multipliziert die j-te und $j+1$-te Spalte vertauscht. Wir multiplizieren sie von links und rechts an $G := \det G(v_1, \dots, v_n)$

und erhalten:

$$TGT = T\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \dots & \langle v_1, v_{j+1}\rangle & \langle v_1, v_j\rangle & \dots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1\rangle & \dots & \langle v_n, v_{j+1}\rangle & \langle v_n, v_j\rangle & \dots & \langle v_n, v_n\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \dots & \langle v_1, v_{j+1}\rangle & \langle v_1, v_j\rangle & \dots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_{j+1}, v_1\rangle & \dots & \langle v_{j+1}, v_{j+1}\rangle & \langle v_{j+1}, v_j\rangle & \dots & \langle v_{j+1}, v_n\rangle \\ \langle v_j, v_1\rangle & \dots & \langle v_j, v_{j+1}\rangle & \langle v_j, v_j\rangle & \dots & \langle v_j, v_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1\rangle & \dots & \langle v_n, v_{j+1}\rangle & \langle v_n, v_j\rangle & \dots & \langle v_n, v_n\rangle \end{pmatrix} = \hat{G}$$

Es gilt also $\hat{G} = TGT$ und damit gilt $\det(\hat{G}) = \det(T)\det(G)\det(T)$ und da $\det(T) = 1$ gilt, gilt direkt $\det(\hat{G}) = \det(G)$, was wir zeigen wollten. Die Aussage bezüglich σ folgt nun mittels vollständiger Induktion über die Anzahl an Transpositionen.

Aufgabe 4

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f : V \to V$ eine Isometrie.

1. Sei $U \leq V$ ein f-invarianter Unterraum. Zeige, dass $U^\perp$ ebenfalls f-invariant ist.
2. Zeige, dass es einen Unterraum $U \subseteq V$ gibt, sodass V als die orthogonale Summe $U \oplus^\perp \mathsf{Eig}_1(f) \oplus^\perp Eig_{-1}(f)$ dargestellt werden kann.

Lösung:

1. Sei $w \in U^\perp$, dann gilt $\forall u \in U : \langle u, w\rangle = 0$. Da f eine Isometrie ist, gilt $\langle f(u), f(w)\rangle = \langle u, w\rangle = 0$. Als Isometrie ist f injektiv. Da $f(U) \subseteq U$ gilt, folgt mit $\dim \mathsf{im}(f|_U) = \dim(U)$ aus der Injektivität bereits Surjektivität auf U, das heißt $\forall v \in U \exists u \in U : f(u) = v$.
   Sei nun $v \in U$ beliebig mit Urbild u und $w \in U^\perp$. Dann gilt:
   $$\langle f(w), v\rangle = \langle f(w), f(u)\rangle = \langle w, u\rangle = 0$$
   also ist $f(w) \in U^\perp$ und damit gilt $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$, das heißt $U^\perp$ ist ebenfalls f-invariant.

2. Es sei $\mathsf{Eig}_1(f)$ der Eigenraum von f zum Eigenwert 1 und $\mathsf{Eig}_{-1}(f)$ der Eigenraum von f zum Eigenwert -1. Da f eine Isometrie ist, gibt es keine anderen Eigenwerte als $+1$ und -1. Wir wissen, dass für jeden Unterraum $W \subseteq V$ gilt, dass $V = W \oplus^\perp W^\perp$, also insbesondere $V = \mathsf{Eig}_1(f) \oplus^\perp \mathsf{Eig}_1(f)^\perp$. Wir wollen als nächstes zeigen, dass $\mathsf{Eig}_{-1}(f) \subseteq \mathsf{Eig}_1(f)^\perp$. Sei dazu $v \in \mathsf{Eig}_{-1}(f)$ und $u \in \mathsf{Eig}_1(f)$. Es gilt:
   $$\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, -v\rangle = -\langle u, v\rangle$$
   und damit gilt $\langle u, v\rangle = 0$, das heißt $v \in \mathsf{Eig}_1(f)^\perp$, also wissen wir bereits $\mathsf{Eig}_{-1}(f) \subseteq \mathsf{Eig}_1(f)^\perp$. Es sei nun U das orthogonale Komplement von $\mathsf{Eig}_{-1}(f)$ in $\mathsf{Eig}_1(f)^\perp$, also $U = \mathsf{Eig}_{-1}(f)^\perp \cap \mathsf{Eig}_1(f)^\perp$. Dann gilt:
   $$\mathsf{Eig}_1(f)^\perp = \mathsf{Eig}_{-1}(f) \oplus^\perp U$$
   und damit
   $$V = \mathsf{Eig}_1(f) \oplus^\perp \mathsf{Eig}_1(f)^\perp = \mathsf{Eig}_1(f) \oplus^\perp Eig_{-1}(f) \oplus^\perp U$$

wie gewünscht.